EXERCICE N°4 : 6 points

A/ 1) Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{2}\ln(x)-1$

a) Etudier les variations de la fonction g (On ne demande pas les limites)

b) Déduire que $\sqrt{x}-\ln\left(\sqrt{x}\right)\geq 1$ pour tout $x>0$

2) On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\ln\left(\sqrt{x}\right)} & si\ x>0\\ 0 & si\ x=0\end{cases}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité à droite en 0. Interpréter graphiquement.

c) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

3) a) Montrer que pour tous $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{1-\ln\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f

c) Vérifier qu'une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 1 est : $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.

d) Construire la courbe (C_f) et la tangente (T) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

B/ Soit F la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $F(x)=\int_1^x \dfrac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}-\ln\left(\sqrt{t}\right)}\,dt$.

1) a) Montrer que F est dérivable sur $]0,+\infty[$.

b) Montrer que F est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

c) Déterminer le signe de $F(x)$ suivant les valeurs de x.

2) a) Calculer $\int_1^x 1+\ln\left(\sqrt{t}\right)dt$ pour $x\in]0,+\infty[$

b) Montrer que $\dfrac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}-\ln\left(\sqrt{t}\right)}\leq 1+\ln\left(\sqrt{t}\right)$ pour tout $t\in[1,+\infty[$.

c) En déduire que $F(x)\leq\frac{1}{2}(x-1)+x\ln\left(\sqrt{x}\right)$ pour tout $x\geq 1$.

3) a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $\int_1^x 1+\dfrac{\ln\left(\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}\,dt=x+1-2\sqrt{x}+\sqrt{x}\ln x$.

b) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f(t)\geq 1+\dfrac{\ln\left(\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t}}$.

c) En déduire que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $x+1-2\sqrt{x}+\sqrt{x}\ln x\leq F(x)$.

d) Déduire de ce qui précède une valeur approchée de $F(2)$.

EXERCICE N°5 : 4 points

Dans le graphique ci-dessous C_1 et C_2 sont les courbes représentatives d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et de sa fonction dérivée f '.

I/ 1) Justifier que Γ_1 est la courbe de f.